

MATRIZ INVERSA II

- 1) a) Estudia para qué valores de a existe la inversa de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 2 \\ 2 & -1 & a \end{pmatrix}$$

- b) Calcula A^{-1} para $a = 0$

- 2) Halla una matriz, X , tal que $AX = B$, siendo: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

- 3) a) Encuentra los valores de k para los que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix}$ no sea inversible.

- b) Calcula la matriz inversa de A para $k = 0$

- 4) Comprueba que la matriz $A = \begin{pmatrix} a & a^2 - 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ tiene inversa cualquiera que sea el valor del parámetro a y calcula A^{-1} .

SOLUCIONES

1) a) Para que exista la inversa de A el determinante tiene que ser no nulo:

$$\text{Calculamos el determinante de } A: |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 2 \\ 2 & -1 & a \end{vmatrix} = -a^2 - a + 6 = 0 \rightarrow a = \begin{cases} -3 \\ 2 \end{cases}$$

Por lo tanto, existe A^{-1} siempre que $a \neq -3$ y $a \neq -2$

b) Para $a = 0$, la matriz queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 6$, calculamos la adjunta

transpuesta:

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow (Adj(A))^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

3) a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix}$ no es inversible si su determinante es nulo, hallémoslo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix} = -m^2 + 3m - 2 = 0 \Rightarrow m = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases} \rightarrow A \text{ no es inversible si } m=1 \text{ ó } m=2$$

b) Para $m = 0$ la matriz queda: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = -2 \neq 0$

hallamos la matriz adjunta transpuesta:

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow (Adj(A))^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

4) $A = \begin{pmatrix} a & a^2 - 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a & a^2 - 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - a^2 + 1 = 1 \neq 0$ para cualquier valor de a

Halleemos la inversa:

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 - a^2 & a \end{pmatrix} \rightarrow (Adj(A))^t = \begin{pmatrix} a & 1 - a^2 \\ -1 & a \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} a & 1 - a^2 \\ -1 & a \end{pmatrix}$$